

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf De M'sila

Faculté Des Mathématiques et de l'Informatique
Département De Mathématiques

MÉMOIRE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Présenté par : Ghadbane Ibtissam

THÈME

Dérivées et Intégrales d'ordre fractionnaire

Devant le jury composé de :

M.	BENHAMIDOUCHE	Professeur	U. M'sila	Président
Melle.	MADJIDI Fadila	Maître de conférences	U. M'sila	Directrice de mémoire
M.	SAADI Abderachid	Maître de conférences	U. M'sila	Examineur

Année Universitaire : 2017/2018

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à ma chère mère ,
A mon cher père qui m'ont toujours soutenu ,
Qui m'ont aide à affronter les difficultés ,
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils , leurs patience , leurs persévérance .
A mes très chères soeurs et mes frères .
A toute ma famille .
A tous les amis .
A tous .*

Remerciements

*J'aimerai en premier lieu remercier notre dieu **Allah** qui nous donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

*j'exprime ici notre profonde reconnaissance à l'égard de l'encadreur **MADJIDI Fadila**. Elle a sur orienter mon travail sur l'immense champ d'actualité de recherche. Les conseils et encouragements qu'elle n'a jamais cessé de prodiguer sont inestimables, sa patience et sa compréhension m'ont permis d'avancer et de terminer ce travail.*

Que tous les membres du jury et tous les enseignants qui on contribue à notre formation reçoivent notre gratitude et en particulier ceux de département des mathématiques.

Merci à tout ceux qui on contribué de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Les fonctions spéciales	3
1.1.1 Fonction Gamma	3
1.1.2 Fonction Bêta	7
1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler	9
1.1.4 Fonction de Green	10
1.1.5 La fonction Wright	11
2 Calcul fractionnaire dans le cas continu	12
2.1 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	12
2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	17
2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	19
2.4 Approche de Hadamard	21
2.5 Approche de Grunwald-Letnikov	22
2.6 Approche de Weyl	23
3 Calcul fractionnaire dans le cas discret	24
3.1 Quelques définitions fondamentales	24
3.2 La somme à gauche et à droite d'ordre fractionnaire de Riemann Liouville . .	25
3.3 La fonction de Mittag Leffler discrète	25

3.4	La différence d'ordre fractionnaire à gauche au sens de Caputo, et au sens de Riemann	25
3.5	La différence d'ordre fractionnaire à droite avec la fonction de Mittag-Leffler	26
	Bibliographie	29

Introduction

L'appellation "**calcul fractionnaire**" ne signifie pas le calcul des fractions, elle ne signifie pas non plus une fraction de n'importe quel calcul différentiel, intégrale ou on calcul de variations.

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales, et des dérivées d'ordre arbitraire réel ou même complexe. C'est une généralisation du calcul classique, et par conséquent, conserve des nombreuses propriétés de base.

Généralement les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, qui simplifient de manière significative leur utilisation pour résoudre des problèmes appliqués dans de divers domaines de la science. La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire n'ont aucune interprétation géométrique et physique acceptable pendant plus 300 ans.

La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales.

Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale, que présente certaines systèmes complexes rencontrés dans la nature, ou dans les interactions de la société. Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systèmes complexe ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme.

Les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques, ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisa-

tion de ces phénomènes.

L'histoire de la dérivée non entier s'étale de la fin du 17 ème siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'HOSPITAL a soulevé une question à LEIBNIZ en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. LEIBNIZ, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit à L'HOSPITAL : "...cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tiré des conséquences utiles".

Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à LIOUVILLE, qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, RIEMANN a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de LIOUVILLE, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de RIEMANN-LIOUVILLE". Plus tard, d'autres théories ont fait leur apparition comme celle de GRUNWALD-LEITNIKOV, de WEYL et de CAPUTO. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une abstraction ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990. Les équations différentielles fractionnaires, sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, la biologie, la mécanique...

Ce travail est divisé en trois chapitres. Dans **le premier chapitre**, nous donnons la définition du mot "calcul fractionnaire" et quelques définitions de base essentielles utilisées dans la dérivation fractionnaire.

Le chapitre 2, contient les dérivées et les intégrales fractionnaires dans le cas continu.

Le Chapitre 3, Sur le titre "calcul fractionnaire dans le cas discret", contient des définitions fondamentales et la différence d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et au sens de Riemann et la différence d'ordre fractionnaire à droite avec la fonction de Mittag-Leffler.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons des notions de base qui concernent les fonctions spéciales qui sont utilisées dans notre travail

1.1 Les fonctions spéciales

Dans cette section nous présentons des définitions et propriétés pour les fonctions : Gamma, Bêta et Mittag-Leffler,...

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$, et permet à n de prendre des valeurs réelles ou même complexes.

Définition 1.1.1. [3] *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \text{ ou } z \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Qui converge sur le demi-plan complexe $\operatorname{Re}(z) > 0$.

$\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Exemple 1.1.1.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \text{ car}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$$

par l'intégrale par parties, on obtient :

$$\Gamma(2) = [-te^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

Comme une deuxième méthode on utilise la formule $\Gamma(n) = (n-1)!$ alors

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma(2) = 1! = 1.$$

Lemme 1.1.1. *La fonction Gamma est une fonction de classe \mathbb{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* (resp. holomorphe sur le demi-plan $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$) et $\forall K \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Proposition 1.1.1. [3] *Nous avons les propriétés suivantes :*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$, $n \in \mathbb{N}$; on a :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
3. $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Démonstration :

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

2.

2.1 Avec le changement de variable $s = \sqrt{t}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\
 &= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \text{ (d'après l'intégrale de gauss)} \\
 &= \sqrt{\pi}.
 \end{aligned}$$

2.2 Nous allons démontrer la formule $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \frac{0! \sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}$

Supposons que la formule est vérifiée pour $(n - 1)$ et considérons n . C-à-d que supposons que $\Gamma((n - 1) + \frac{1}{2}) = \frac{2(n-1)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!}$, est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) + 1\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left((n - 1) + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{(2n - 1)}{2} \frac{(2n - 2)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n - 1)!} \\
 &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n - 1)}{2} \frac{(2n - 2)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n - 1)!} \\
 &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n (n)!}.
 \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n .

3. Il suffit d'appliquer 1 pour $z = n - 1$.

Remarque 1.1.1. La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entier par la formule $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, et la transition d'un intervalle à un autre $(-1, 0)$; $(-2, -1)$; $(-3, -1)$, ...

La fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatifs entiers.

Exemple 1.1.2.

$$\begin{aligned}
1. \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2} + 1\right)}{\frac{-1}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} \\
&= -2\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2} + 1\right)}{\frac{-3}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.2. *Pour tout $p > 0$ on a :*

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$f(n, p) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx.$$

On peut voir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, p) = \Gamma(p).$$

D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}
f(n, p) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx \\
&= \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^p}{p} \right]_0^n + \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx \\
&= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx.
\end{aligned}$$

Encore fois, en intégrant par parties

$$\begin{aligned}
 f(n, p) &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx = \\
 &= \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^n + \frac{n-1}{np(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^{p+1} dx. \\
 &= \frac{n(n-1)}{n^2 p(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1} dx.
 \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned}
 f(n, p) &= \frac{n(n-1)\dots[(n-(n-1))]}{n^n p(p+1)\dots[p+(n-1)]} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)} dx. \\
 &= \frac{n!}{n^n p(p+1)\dots[p+(n-1)]} \left[\frac{x^{n+p}}{n+p} \right]_0^n \\
 &= \frac{n! n^p}{p(p+1)\dots(n+p)}
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)\dots(n+p)}.$$

□

1.1.2 Fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.1.2. [3] *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad \text{Re}(z) > 0, \quad \text{Re}(w) > 0. \quad (1.2)$$

Lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta :

La fonction Gamma et Bêta sont liées par la relation :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (1.3)$$

Démonstration :

Soit $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t_1} t_1^{z-1} dt_1 \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t_2} t_2^{w-1} dt_2 \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t_1+t_2)} t_1^{z-1} t_2^{w-1} dt_1 dt_2\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} u = t_1 + t_2 \\ v = \frac{t_1}{t_1+t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = uv \\ t_2 = u(1-v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

De même que le domaine D' correspondante à D dans les coordonnées u, v est
 $D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$

Alors

$$\begin{aligned}\int_D \int_D t_1^{z-1} t_2^{w-1} e^{-(t_1+t_2)} dt_1 dt_2 &= \int_{D'} \int_{D'} (uv)^{z-1} (u(1-v))^{w-1} e^{-u} | -u | du dv \\ &= \int_{D'} \int_{D'} u^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{z+w-1} v^{z-1} (1-v)^{w-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} u^{z+w-1} e^{-u} du \int_0^1 v^{z-1} (1-v)^{w-1} dv \\ &= \Gamma(z+w) B(z, w).\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Proposition 1.1.3. 1. $B(z, w) = B(w, z)$, (*symétrique*).

2. $B(z, 1) = \frac{1}{z}$

Démonstration :

1.

$$\begin{aligned} B(z, w) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \\ &= \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(z+w)} \\ &= B(w, z). \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} B(z, 1) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(1)}{\Gamma(z+1)} \\ &= \frac{\Gamma(z)}{z\Gamma(z)} \\ &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

Définition 1.1.3. [1]

La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante

pour $z \in \mathbb{C}$

$$E_\alpha(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa + 1)}, \quad (\alpha > 0). \quad (1.4)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa + \beta)} \quad ; (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.5)$$

Proposition 1.1.4. *Pour des valeurs spéciales de α et β on a :*

$$1. E_1(z) = E_{1,1}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\Gamma(\kappa+1)} = e^z.$$

$$2. E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \text{ (on obtient } E_{1,2}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa)}}{\Gamma(\kappa+2)} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa)}}{(\kappa+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{(\kappa+1)}}{(\kappa+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1)).$$

$$3. E_{1,3}(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\Gamma(\kappa+3)} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{(\kappa+3)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa+2}}{(\kappa+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$$

En générale :

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{\kappa=0}^{m-2} \frac{z^{\kappa}}{\kappa!} \right\}$$

Théorème 1.1.1. *La fonction de Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*

1) Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag-Leffler généralisée satisfait :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha}) dt = \frac{1}{z-1}. \quad (1.6)$$

2) L'intégration de la fonction de Mittag-Leffler :

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = z^{\beta} E(\alpha, \beta+1)(\lambda z^{\alpha}). \quad (1.7)$$

3) La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(z^{\alpha}). \quad (1.8)$$

Démonstration. Voir [1]

□

1.1.4 Fonction de Green

La fonction de Green intervient dans la résolution de certaines équations différentielles (en particulier, le cas des équations différentielles fractionnaires).

Définition 1.1.4. *La fonction de Green dans le cas fractionnaire est définie comme suit :*

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-a)(b-s)}{b-a} & a \leq t \leq s \leq b \\ \left(\frac{(t-a)(b-s)}{b-a} - (t-s) \right) & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases}$$

Lemme 1.1.2. *La fonction de Green $G(t, s)$ précédemment définie possède les propriétés suivantes :*

- ◆ $G(t, s) \geq 0$ pour tout $a \leq t, s \leq b$.
- ◆ $\max_{t \in [a, b]} G(t, s) = G(s, s)$ pour $s \in [a, b]$.
- ◆ $G(s, s)$ admet un unique maximum, donné par

$$\max_{s \in [a, b]} G(s, s) = G\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)}{4}.$$

Démonstration :

- ◆ Il est clair que $g_1(t, s) = \frac{(t-a)(b-s)}{b-a} \geq 0$. En regardant que la partie $g_2(t, s) = \left(\frac{(t-a)(b-s)}{b-a} - (t-s)\right)$ on voit que $(t-s) = \frac{t-a}{b-a}(b - (a + \frac{(s-a)(b-a)}{(t-a)}))$ et que $a + \frac{(s-a)(b-a)}{(t-a)} \geq s$ ssi $s \geq a$. Donc, on conclue que $g_2(t, s) \geq 0$ aussi. D'où, la démonstration de la première partie est terminée.
- ◆ Clairement, $g_1(t, s)$ est une fonction croissante en t . En dérivant g_2 par rapport t pour chaque s fixé ; on voit que g_2 est une fonction décroissante en t .
- ◆ Soit $g(s) = G(s, s) = \frac{(s-a)(b-s)}{b-a}$. Alors, on peut montrer que $g'(s) = 0$ si $s = \frac{a+b}{2}$ et donc la démonstration est achevée en vérifiant que $g(\frac{a+b}{2}) = \frac{b-a}{4}$.

1.1.5 La fonction Wright

Définition 1.1.5. *La fonction de Wright est définie par :*

$$\phi(\alpha, \beta; x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > -1 \quad (1.9)$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire dans le cas continu

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme des fonctions.

Dans ce chapitre, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions. On donne aussi quelques approches (Hadamard, Grunwald-Letnikov, Weyl)

2.1 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soit $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω

On pose :

$$I_{a+}^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$$\begin{aligned}
I_{a+}^2 f(x) &= I_{a+}^1 (I_{a+}^1 f(x)) \\
&= \int_a^x I_{a+}^1 f(t) dt \\
&= \int_a^x \int_a^t f(s) ds dt.
\end{aligned}$$

D'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned}
I_{a+}^2 f(x) &= \left[t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt \\
&= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \\
&= \int_a^x (x - t) f(t) dt.
\end{aligned}$$

Donc, pour n^{ieme} itération, on obtient :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-n}} f(t) dt.$$

Cette formule est appelée formule de cauchy, et d'après la propriété de Gamma

$\Gamma(n) = (n-1)!$, nous avons :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-n}} f(t) dt.$$

Définition 2.1.1. [4] Soit $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω .

L'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ définie par :

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad \text{Re}(\alpha) > 0. \quad (2.1)$$

De même manière, on définit l'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ par :

$$I_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \quad \text{Re}(\alpha) > 0. \quad (2.2)$$

Proposition 2.1.1. voir([1],page 71)).

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$1. I_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (x - a)^{\beta+\alpha-1}. \quad (2.3)$$

$$2. I_{b-}^{\alpha} (b - x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (b - x)^{\beta+\alpha-1}. \quad (2.4)$$

Démonstration :

1. On pose $f(x) = (x - a)^{\beta-1}$. Nous avons

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^{\beta-1} dt.$$

Avec le changement de variable $t = a + s(x - a)$, nous avons

$$\begin{cases} t = a \Leftrightarrow s = 0; \\ t = x \Leftrightarrow s = 1, \\ dt = (x - a)ds \end{cases}$$

Donc avec la définition de la fonction Bêta, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{(x - a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\ &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (1.3), on obtient :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (x - a)^{\beta+\alpha-1}.$$

2. On pose $g(x) = (b - x)^{\beta-1}$. Nous avons

$$I_{b-}^{\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t - x)^{\alpha-1} (b - t)^{\beta-1} dt.$$

Avec le changement de variable $t = b - s(b - x)$, nous avons :

$$\begin{cases} t = b \Leftrightarrow s = 0; \\ t = x \Leftrightarrow s = 1, \\ dt = -(b - x)ds \end{cases}$$

Donc avec la définition de la fonction Bêta, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{b-}^{\alpha} g(x) &= \frac{(b-x)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (1.3), on obtient :

$$I_{b-}^{\alpha} g(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

Proposition 2.1.2. Soient $f \in C([a, b])$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Les intégrales fractionnaires de **Riemann-Liouville** (2.1) et (2.2) possède les propriétés suivantes :

1. $I_{a+}^{\alpha} [I_{a+}^{\beta} f(x)] = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x)$.
2. $I_{b-}^{\alpha} [I_{b-}^{\beta} f(x)] = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x)$.

Démonstration. 1. Nous avons :

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} [I_{a+}^{\beta} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a+}^{\beta} f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} dt \right] d\tau \text{ (d'après le théorème de Fubini) } . \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $t = \tau + s(x - \tau)$, on obtient :

$$\begin{cases} dt = (x - \tau) ds \\ t = x \Leftrightarrow s = 1 \\ t = a \Leftrightarrow \tau = a \Leftrightarrow s = 0. \end{cases}$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
 I_{a+}^{\alpha} \left[I_{a+}^{\beta} f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \right] \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \\
 &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).
 \end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 I_{b-}^{\alpha} \left[I_{b-}^{\beta} f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{I_{b-}^{\beta} f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \left[\int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-x)^{1-\alpha}(\tau-t)^{1-\beta}} d\tau \right] dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_t^b \left[\int_x^b \frac{f(\tau)}{(t-x)^{1-\alpha}(\tau-t)^{1-\beta}} dt \right] d\tau \quad (\text{d'après théorème de Fubini}).
 \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $t = \tau - s(\tau - x)$, on obtient :

$$\begin{cases} dt = -(\tau - x) ds = x \Leftrightarrow s = 1 \\ t = b \Leftrightarrow \tau = b \Leftrightarrow s = 0. \end{cases}$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
 I_{b-}^{\alpha} \left[I_{b-}^{\beta} f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \left[\int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \right] \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^b \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} \\
 &= I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x).
 \end{aligned}$$

□

2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1. (voir [1], [3]) Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_{a+}^\alpha f$ et ${}^{RL}D_{b-}^\alpha f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ sont définie par :

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_{a+}^\alpha f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n = [Re(\alpha)] + 1, \quad x > a. \end{aligned} \quad (2.5)$$

et

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_{b-}^\alpha f)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad n = [Re(\alpha)] + 1, \quad x < b. \end{aligned} \quad (2.6)$$

à droite et à gauche respectivement, où $[\cdot]$ dénote la fonction partie entière d'un nombre réel

Remarque 2.2.1. 1. Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, alors $n = m + 1$. Donc, en utilisant (2.5) et (2.6), on obtient les propriétés suivantes :

$$(a) \quad {}^{RL}D_{a+}^0 f(x) = {}^{RL}D_{b-}^0 f(x) = f(x).$$

$$(b) \quad {}^{RL}D_{a+}^m f(x) = f^{(m)}(x).$$

$$(c) \quad {}^{RL}D_{b-}^m f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x).$$

Où $f^{(m)}$ est la dérivée usuelle de f d'ordre m .

2. Si $0 < Re(\alpha) < 1$, alors $n = 1$. Donc, (2.5) et (2.6) devient :

$${}^{RL}D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} \right), \quad x > a.$$

$${}^{RL}D_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right) \left(\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^\alpha} \right), \quad x < b.$$

3. Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, alors $n = [\alpha] + 1$. Donc, (2.5) et (2.6) devient :

$${}^{RL}D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \right); \quad x > a. \quad (2.7)$$

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\right); \quad x < b. \quad (2.8)$$

4 . Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$. Donc, (2.7) et (2.8) devient :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right), \quad x > a.$$

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right) \left(\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}\right), \quad x < b.$$

Proposition 2.2.1. voir [1] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

1. ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. ${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}$.

Démonstration :

1 .on pose $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$. En utilisant 2.5, on obtient :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}(I_{a+}^{n-\alpha}f(x)), \quad n = [Re(\alpha)] + 1.$$

D'après propriété 2.3, on obtient :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha-1} \quad (2.9)$$

D'après les propriétés de la fonction Gamma, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta+n-\alpha-1} &= (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\dots(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nous substituons 2.10 dans 2.9, nous obtenons :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

2 . On pose $g(x) = (b-x)^{\beta-1}$. En utilisant 2.6, on obtient :

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}g(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(I_{b-}^{n-\alpha}g(x)), \quad n = [Re(\alpha)] + 1.$$

D'après propriété 2.4, on obtient :

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}g(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (b - x)^{\beta + n - \alpha - 1} \quad (2.11)$$

D'après les propriétés de la fonction Gamma, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (b - x)^{\beta + n - \alpha - 1} &= (-1)^n (\beta + n - \alpha - 1)(\beta + n - \alpha - 2) \dots (\beta - \alpha) (b - x)^{\beta - \alpha - 1} \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(\beta + n - \alpha)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - x)^{\beta - \alpha - 1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous substituons 2.11 dans 2.12, nous obtenons :

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha}g(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - x)^{\beta - \alpha - 1}.$$

Remarque 2.2.2. 1. Si $\beta = 1$ et $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de de **Riemann-Liouville** constante en général n'est pas nulle :

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}1 = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \quad \text{et} \quad {}^{RL}D_{b-}^{\alpha}1 = \frac{(b - x)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}.$$

2. Pour tout $j = 1, 2, \dots, [\text{Re}(\alpha)] + 1$ avec $\text{Re}(\alpha) \geq 0$, nous avons : .

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(x - a)^{\alpha - j} = {}^{RL}D_{b-}^{\alpha}(b - x)^{\alpha - j} = 0.$$

2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 2.3.1. [3] Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a, b]$

Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par :

$${}^c\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = I_{a+}^{n-\alpha}f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} \quad (2.13)$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = (-1)^n I_{a+}^{n-\alpha}f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} \quad (2.14)$$

Proposition 2.3.1. 1. les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont linéaires c'est à dire :

$${}^c\mathcal{D}_{a+}^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda({}^c\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(x) + \mu({}^c\mathcal{D}_{a+}^\alpha g)(x), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b-}^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda({}^c\mathcal{D}_{b-}^\alpha f)(x) + \mu({}^c\mathcal{D}_{b-}^\alpha g)(x) \quad , \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Les relations entre les dérivées au sens de caputo (2.13), (2.14) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville(2.5), (2.6) sont données par :

$${}^c\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \quad (2.15)$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right] \quad (2.16)$$

Remarque 2.3.1. 1. si $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, alors avec Remarque(2.2.2.), les relations (2.15) et (2.16) prennent les formes suivantes :

$${}^c\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha [f(x) - f(a)] = D_{a+}^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha [f(x) - f(b)] = D_{b-}^\alpha f(x) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha}$$

2. Si $\alpha \notin \mathbb{N}^*$, alors avec propriétés de la fonction Gamma, les relations 2.15 et 2.16 prennent les formes suivantes :

$${}^c\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(x) = D_{a+}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}$$

et

$${}^c\mathcal{D}_{b-}^\alpha f(x) = D_{b-}^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}$$

3 . Si $f \in C([a, b])$, nous avons :

$${}^c\mathcal{D}_{a+}^\alpha (I_{a+}^\alpha f(x)) = f(x)$$

et

$$I_{a+}^{\alpha}({}^c\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x)) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Donc, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemple 2.3.1. 1 . Soient $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ et $n = [\operatorname{Re}(\beta)] + 1$. La dérivée de la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ au sens de Caputo est donnée par :

$${}^c\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (2.17)$$

2 . En remplacement dans (2.17) $\beta = 1$, nous obtenons que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

%endeqnarray %endeqnarray

2.4 Approche de Hadamard

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelque propriétés de l'intégrale, et la dérivée fractionnaire de Hadamard.

Définition 2.4.1. Soit $\alpha > 0$. L'intégrale fractionnaire de Hadamard à gauche (resp. à droite) d'ordre α de f est définie par :

$$(J_{a+}^{\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau,$$

et,

$$(J_{b-}^{\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Proposition 2.4.1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Si $0 < a < b < +\infty$, et $f \in L^p(a, b)$. Alors :

$$J_{a+}^{\alpha} J_{a+}^{\beta} f = J_{a+}^{\alpha+\beta} f, \quad (c \leq 0),$$

et,

$$J_{b-}^{\alpha} J_{b-}^{\beta} f = J_{b-}^{\alpha+\beta} f, \quad (c \geq 0).$$

Définition 2.4.2. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ et $\delta = tD$ ($D = \frac{d}{dt}$). Les dérivées fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre α de f sont définies par :

$$({}^H D_{a+}^\alpha f)(t) = \delta^n (J_{a+}^\alpha f)(t) = \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t > a),$$

et

$$({}^H D_{b-}^\alpha f)(t) = (-\delta)^n (J_{b-}^\alpha f)(t) = \left(-t \frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t < b),$$

Respectivement.

Proposition 2.4.2. Soit $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, et $1 \leq p \leq +\infty$, alors, pour $f \in L^p(a, b)$:

$${}^H D_{a+}^\alpha J_{a+}^\alpha f = f \quad (c \leq 0),$$

et,

$${}^H D_{b-}^\alpha J_{b-}^\alpha f = f \quad (c \geq 0).$$

Proposition 2.4.3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$. Soit $f \in L^p(a, b)$ avec $(1 \leq p \leq +\infty)$:

$${}^H D_{a+}^\beta J_{a+}^\alpha f = J_{a+}^{\alpha-\beta} f \quad \text{et} \quad {}^H D_{b-}^\beta J_{b-}^\alpha f = J_{b-}^{\alpha-\beta} f.$$

2.5 Approche de Grunwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. La dérivée de Grunwald-Letnikov d'ordre α est définie par :

$$(D_{a+}^\alpha f)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh).$$

Les coefficients binomiaux avec des signes alternatifs pour des valeurs positives de n sont définis comme

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

Pour le calcul des coefficients binomiaux on peut utiliser la relation entre la fonction Gamma d'Euler et la factorielle, définie comme

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}$$

La dérivée de Grunwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur \mathbb{R} (de Liouville). Par contre les inconvénients de cette approche sont sa difficulté technique pour faire les calculs, les preuves et les grandes restrictions sur les fonctions.

2.6 Approche de Weyl

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, telles que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| \leq c,$$

C'est à dire f fonction de Schwartz, noté f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.6.1. [3] Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La transformation de Weyl est définie par :

$$(W^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Proposition 2.6.1. [3] La transformation de Weyl vérifie :

$$W^\alpha \circ W^\beta = W^{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dx}\right) \circ W^\alpha = -W^{\alpha-1} = W^\alpha \circ \left(\frac{d}{dx}\right).$$

Démonstration. Voir([3], la page 14). □

Définition 2.6.2. [3] La dérivée fractionnaire au sens de Weyl est définie par :

$$({}^W D^\alpha)(x) = \left(\frac{-d}{dx}\right)^m [W^{m-\alpha} f](x),$$

Où $\alpha \in]m-1, m[$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Chapitre 3

Calcul fractionnaire dans le cas discret

3.1 Quelques définitions fondamentales

Définition 3.1.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et $b - a$ un entier positif.

Dans ce qui suit, on considère l'ensemble de la forme suivante :

$$\mathbb{N}_{a,b} = \{a, a+1, \dots, b\}.$$

Définition 3.1.2. Pour une fonction f , discrète, définie sur l'ensemble $\mathbb{N}_{a,b} = \{a, a+1, \dots, b\}$, on définit :

$$\nabla f(t) = f(t) - f(t-1) \text{ et } \Delta f(t) = f(t+1) - f(t).$$

Pour un entier naturel k , $\nabla^k f(t)$ et $\Delta^k f(t)$ signifie la $k^{\text{ème}}$ itération des opérateurs nabla et delta.

Définition 3.1.3. [2]

(i) Pour un nombre naturel m , la fonction ascendante de t est définie comme suit :

$$t^{\overline{m}} = \prod_{k=0}^{m-1} (t+k), \quad t^{\overline{0}} = 1. \quad (3.1)$$

(ii) Pour chaque nombre réel α , la fonction ascendante de t devient :

$$t^{\overline{\alpha}} = \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2, -1, 0\}, \quad 0^{\overline{\alpha}} = 0 \quad (3.2)$$

3.2 La somme à gauche et à droite d'ordre fractionnaire de Riemann Liouville

Définition 3.2.1. [2] Pour $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}_a = a, a+1, \dots$, la somme à gauche d'ordre fractionnaire de Riemann Liouville est définie par :

$$({}_a\nabla^{-\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+1}^t (t - \rho(s))^{\overline{\alpha-1}} f(s).$$

Si f est définie sur ${}_b\mathbb{N} = \{b, b-1, \dots\}$, alors la somme à droite d'ordre fractionnaire de Riemann Liouville est définie par

$$(\nabla_b^{-\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=t}^{b-1} (s - \rho(t))^{\overline{\alpha-1}} f(s).$$

Remarque 3.2.1. Il est bien connu que pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a [2]

$$({}_a\nabla^{-\alpha} {}_a\nabla^{-\beta}f)(t) = ({}_a\nabla^{-\beta} {}_a\nabla^{-\alpha}f)(t) = ({}_a\nabla^{-(\alpha+\beta)}f)(t). \quad (3.3)$$

3.3 La fonction de Mittag Leffler discrète

Définition 3.3.1. (voir [7, 8, 11]) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$ et $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ avec $\text{Re}(\alpha) > 0$, les fonctions discrètes nabla Mittag-Leffler sont définies par

$$E_{\alpha, \beta}(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\overline{k\alpha+\beta-1}}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (3.4)$$

Pour $\beta = 1$, elles sont écrites comme suit :

$$E_{\overline{\alpha}}(\lambda, z) \triangleq E_{\overline{\alpha}, 1}(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\overline{k\alpha}}}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (3.5)$$

3.4 La différence d'ordre fractionnaire à gauche au sens de Caputo, et au sens de Riemann

Définition 3.4.1. [9] Supposons que f est définie sur $\mathbb{N}_{a,b} = \{a, a+1, \dots, b\}$, $a < b$, $a \equiv b \pmod{1}$, $\alpha \in [0, 1]$, alors la définition de la différence fractionnaire à gauche de Caputo (the new left Ca-

puto fractional difference) dans le sens de Abdon et Baleanu est :

$$({}^{ABC}_a \nabla^\alpha f)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{s=a+1}^t \nabla_s f(s) E_{\bar{\alpha}}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}, t - \rho(s)\right), \quad t \in \mathbb{N}_a \quad (3.6)$$

et dans le sens de Riemann est définie par :

$$({}^{ABR}_a \nabla^\alpha f)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \nabla_t \sum_{s=a+1}^t f(s) E_{\bar{\alpha}}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}, t - \rho(s)\right), \quad t \in \mathbb{N}_{a+1}. \quad (3.7)$$

L'intégrale fractionnaire associé est donné par :

$$({}^{AB}_a \nabla^{-\alpha} f)(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} ({}_a \nabla^{-\alpha} f)(t). \quad (3.8)$$

Où $B(\alpha) > 0$ est une fonction de normalisation vérifiant $B(0) = B(1) = 1$.

Dans [9], ils ont vérifié que $({}_a^{AB} \nabla^{-\alpha} {}_a^{ABR} \nabla^\alpha f)(t) = f(t)$ et $({}_a^{ABR} \nabla^\alpha {}_a^{AB} \nabla^{-\alpha} f)(t) = f(t)$. De [9], nous rappelons la relation entre la différenciation d'ordre fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville, et la différenciation d'ordre fractionnaire à gauche de Caputo, en utilisant la fonction discrète de Mittag-Leffler par :

$$({}^{ABC}_a \nabla^\alpha f)(t) = ({}^{ABR}_a \nabla^\alpha f)(t) - f(a) \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} E_{\bar{\alpha}}(\lambda, t - a). \quad (3.9)$$

3.5 La différence d'ordre fractionnaire à droite avec la fonction de Mittag-Leffler

Définition 3.5.1. [9] Pour $0 < \alpha < 1$, et f définie sur $\mathbb{N}_{a,b} = \{a, a+1, \dots, b\}$, $\alpha \in [0, 1]$.

La droite différence fractionnaire de f est définie par :

$$({}^{ABR}_b \nabla^\alpha f)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} (-\Delta_t) \sum_{s=t}^{b-1} f(s) E_{\bar{\alpha}}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}, (s - \rho(t))\right). \quad (3.10)$$

La droite différence fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

$$({}^{ABC}_b \nabla^\alpha f)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{s=t}^{b-1} (-\Delta_s f)(s) E_{\bar{\alpha}}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}, (s - \rho(t))\right). \quad (3.11)$$

La droite somme fractionnaire de f correspondante est :

$$({}^{AB}_b \nabla^{-\alpha} f)(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} ({}_b \nabla^{-\alpha} f)(t). \quad (3.12)$$

Dans [9], on a vérifié que $({}^{AB}\nabla_b^{-\alpha} {}^{ABR}\nabla_b^\alpha f)(t) = f(t)$ et $({}^{ABR}\nabla_b^\alpha {}^{AB}\nabla_b^{-\alpha} f)(t) = f(t)$. De [9], nous rappelons la relation entre la droite différence fractionnaire de Riemann-Liouville et la droite différence fractionnaire de Caputo avec la fonction discrète de Mittag-Leffler comme suit

$$({}^{ABC}\nabla_b^\alpha f)(t) = ({}^{ABR}\nabla_b^\alpha f)(t) - f(b) \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} E_{\bar{\alpha}}(\lambda, b-t). \quad (3.13)$$

Conclusion

Ce mémoire a pour but de proposer une généralisation de la notion de dérivée traditionnelle afin d'inclure les dérivées fractionnaires comme celles de Riemann-Liouville, Gruenwald-Letnikov et Caputo

Au cours des dernières années un intérêt considérable est attribué aux applications des dérivées fractionnaire (d'ordre non-entier) dans plusieurs domaines. Il a été trouvé dans le champ des interdisciplinaires, beaucoup des systèmes peuvent être décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

par exemple :

- Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématique de la visco-élasticité des matières.
- Les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégral-différentiels .
- En biologie, il a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire, et alors est classé en groupe de modèles d'ordre non-entier.
- En économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire.

Nous comptons, dans l'avenir appliquer le calcul fractionnaire à d'autres équations, et développer d'autres méthodes de résolution des équations à dérivées fractionnaires.

Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. theory and applications of fractional differencial equation. elsvier, 2006.
- [2] C. Goodrich, Allan C. Peterson, Discrete fractional calculus, Springer (2015).
- [3] H.DIB, Equation différentielles fractionnaire, Université Aboubekr Belakid, Tlemcen, (2009).
- [4] I. Podlubny. Fractional differential equations. Academic Press, 1999.
- [5] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [6] Yong Zhou. Basic Theory Fractional Differential Equations.
- [7] T. Abdeljawad, On Delta and Nabla Caputo fractional differences and dual identities, Discr. Dynam. Nat. Soc., Volume 2013 (2013), Article ID 406910, 12 pages.
- [8] T. Abdeljawad, Dual identities in fractional difference calculus within Riemann, Adv. Differ. Equ., 2013, 2013 :36.
- [9] T. Abdeljawad, D. Baleanu, Discrete fractional differences with nonsingular discrete Mittag-Leffler kernels, Advances in Difference Equations (2016) 2016 :232, DOI 10.1186/s13662-016-0949-5.

-
- [10] Thabet Abdeljawad, Fadila Madjidi, A Lyapunov inequality for fractional difference operators with discrete Mittag-Leffler kernel of order $2 \leq \alpha < 5/2$, a apparaitre dans le journal EPJST.
- [11] T. Abdeljawad, F. Jarad, D. Baleanu, A semigroup-like property for discrete Mittag-Leffler functions, Adv. Differ. Equ., 2012/1/72.